Contents

傅里叶变换

基本公式

欧拉公式

$$
\begin{aligned}
e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta \\
e^{-j\theta} &= \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) \\
&= \cos\theta - j\sin\theta \\
e^{j\pi} &= \cos\pi + j\sin\pi = -1 \\
e^{j\pi x} &= \cos\pi x + j\sin\pi x = (-1)^x
\end{aligned}
$$

连续傅里叶变换

一维连续傅里叶变换公式及其反变换公式：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}dt = F(u) \\
\mathfrak{I}^{-1}\{F(u)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ut}du = f(t)
\end{aligned}
$$

二维连续傅里叶变换公式及其反变换公式：

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
f(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv
\end{aligned}
$$

离散傅里叶变换

一维离散傅里叶变换公式及其反变换公式：

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N} \\
f(x) &= \sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi ux/N}
\end{aligned}
$$

可以看出 x 和 u 的取值范围都是 $0,1,2,\cdots,N-1$，x 是空间域的坐标，u 是频率域的坐标。

二维离散傅里叶变换公式及其反变换公式：

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
f(x,y) &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}
\end{aligned}
$$

易得：

$$
F(0,0) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = \bar{f}
$$

极坐标形式

令 $\Re(u,v)$ 表示实部，$\Im(u,v)$ 表示虚部，那么有：

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)} && \text{极坐标形式} \\
|F(u,v)| &= \sqrt{\Re^2(u,v)+\Im^2(u,v)} && \text{幅度谱或频率谱} \\
\phi(u,v) &= \arctan\frac{\Im(u,v)}{\Re(u,v)} && \text{相角或相位谱} \\
P(u,v) &= |F(u,v)|^2 = \Re^2(u,v)+\Im^2(u,v) && \text{功率谱}
\end{aligned}
$$

基本性质

平移性

平移是针对离散傅里叶变换而言的，对连续时域的讨论见时移。

$$
\begin{aligned}
F(u-u_0, v-v_0) &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi((u-u_0)x/M+(v-v_0)y/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}]e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&\Leftrightarrow f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \\
f(x-x_0, y-y_0) &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(u(x-x_0)/M+v(y-y_0)/N)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} [F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}]e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}
\end{aligned}
$$

周期性

二维傅里叶变换在 u 方向和 v 方向都是无限周期的，即：

$$
\begin{aligned}
&F(u,v) = F(u+k_1M, v+k_2N) \\
&f(x,y) = f(x+k_1M, y+k_2N) \\
&\text{where } k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

假设我们将 $F(u,v)$ 平移，令 $u_0 = \frac{M}{2}$，$v_0 = \frac{N}{2}$，那么：

$$
F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}) \Leftrightarrow f(x,y)e^{j\pi(x+y)}
$$

因为 $e^{j\pi x} = (-1)^x$，所以：

$$
F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}) \Leftrightarrow f(x,y)(-1)^{x+y}
$$

所以频率域滤波的第一步就是用 $(-1)^{x+y}$ 乘以空间域的图像，来进行中心变换，这样就可以将频率域的原点移动到空间域的中心，然后再进行图像的傅里叶变换。

对称性

对于二维离散傅里叶变换，$f(x,y)\in\mathbb{R}$，且 $x,y,u,v\in\mathbb{Z}$，那么：

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \underbrace{\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos(2\pi(ux/M+vy/N))}_{\mathbb{R}} - j\underbrace{\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\sin(2\pi(ux/M+vy/N))}_{\mathbb{R}} \\
F(-u,-v) &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(-ux/M-vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos(2\pi(ux/M+vy/N)) + j\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\sin(2\pi(ux/M+vy/N)) \\
&= F^*(u,v)
\end{aligned}
$$

同样

$$
|F(-u,-v)| = |F(u,v)|
$$

奇偶性

先前讨论的二维离散傅里叶变换都是在实数域上的，而奇偶性是针对连续复数域上的函数 $f(x,y)$ 而言的，这里我们对一维连续傅里叶变换进行讨论，二维的情况类似。

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx
\end{aligned}
$$

我们首先讨论 $f(x)$ 是实函数或虚函数的情况：

1. 若 $f(x)$ 是实函数，那么：

$$
\begin{aligned}
F(-u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-2\pi ux)dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx}_{\Re} + \underbrace{j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx}_{\Im} \\
&= [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx]^* \\
&= F^*(u)
\end{aligned}
$$

2. 若 $f(x)$ 是虚函数，那么：

$$
\begin{aligned}
F(-u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-2\pi ux)dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx}_{\Im} + \underbrace{j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx}_{\Re} \\
&= -[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx]^* \\
&= -F^*(u)
\end{aligned}
$$

接着讨论 $f(x)$ 是偶函数或奇函数的情况：

1. 若 $f(x)$ 是偶函数，那么：

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx = 0
$$

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx \\
F(-u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx + j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx \\
&= F(u)
\end{aligned}
$$

2. 若 $f(x)$ 是奇函数，那么：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx = 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
F(u) &= -j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
F(-u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx + j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= -F(u)
\end{aligned}
$$

说明 $F(u)$ 的奇偶性取决于 $f(x)$ 的奇偶性

线性

$$
\mathfrak{I}\{\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\} = \alpha\mathfrak{I}\{f(x,y)\} + \beta\mathfrak{I}\{g(x,y)\}
$$

卷积

以一维连续卷积为例：

$$
(f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau
$$

对其进行傅里叶变换：

$$\begin{aligned}
\Im\{(f\star h)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-j2\pi ut}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ut}dt]d\tau \\
\text{令}t-\tau = m\ \text{则}t = m+\tau\ ,dt = dm & \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j2\pi u(m+\tau)}dm]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j2\pi um}dm]e^{-j2\pi u\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(u)e^{-j2\pi u\tau}d\tau \\
&= H(u)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi u\tau}d\tau \\
&= H(u)F(u)
\end{aligned}$$

所以空间域上的卷积在频率域上就是乘积。此外，频率域的卷积类似于空间域的乘积。

$$\begin{aligned}
(f\star h)(t) &\Leftrightarrow F(u)H(u) \\
(f\cdot h)(t) &\Leftrightarrow (F\star H)(u)
\end{aligned}$$

相关

复习一下空域上的二维卷积：

$$(f\star h)(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

空域上的离散相关与内积类似，定义为：

$$(f\circ h)(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n)h(x+m,y+n)$$

$$\begin{aligned}
(f\circ h)(x,y) &\Leftrightarrow F^*(u,v)H(u,v) \\
f^*(x,y)h(x,y) &\Leftrightarrow (F\circ H)(u,v) \\
(f\circ f)(x,y) &\Leftrightarrow |F(u,v)|^2 \\
|f(x,y)|^2 &\Leftrightarrow (F\circ F)(u,v)
\end{aligned}$$

尺度变换

$$
\begin{aligned}
\Im\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j2\pi ut}dt \\
\text{令}at = \tau \text{ 则}t &= \frac{\tau}{a}\text{ ,}dt = \frac{d\tau}{a} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\frac{u}{a}\tau}\frac{d\tau}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\frac{u}{a}\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{u}{a})
\end{aligned}
$$

时移

与空域类似，时域上的平移也满足类似的性质，即：

$$
\begin{aligned}
\Im\{f(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j2\pi ut}dt \\
\text{令}t-t_0 = \tau \text{ 则}t &= \tau + t_0\text{ ,}dt = d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t_0)e^{-j2\pi u(\tau+t_0)}d\tau \\
&= e^{-j2\pi ut_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t_0)e^{-j2\pi u\tau}d\tau \\
&= e^{-j2\pi ut_0}F(u)
\end{aligned}
$$

冲激函数

$$
\begin{aligned}
\Im\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ut}dt \\
&= e^{-j2\pi u0} = 1 \\
\Im\{\delta(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j2\pi ut}dt \\
&= e^{-j2\pi ut_0}
\end{aligned}
$$

基本步骤

频率域滤波的基本步骤如下：

1. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以空间域的图像，来进行中心变换，这样就可以将频率域的原点移动到空间域的中心，然后再进行图像的傅里叶变换。
2. 计算图像的傅里叶变换 $F(u,v)$。
3. 用滤波器 $H(u,v)$ 乘以 $F(u,v)$，得到 $G(u,v)$。
4. 计算 $G(u,v)$ 的反傅里叶变换 $g(x,y)$。
5. 保留 $g(x,y)$ 的实部。
6. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以 $g(x,y)$，得到 $g'(x,y)$。

更完整地，我们一般先对图像进行填充使其大小为 $P\times Q$，其中 $P=2M$，$Q=2N$，然后再乘上 $(-1)^{x+y}$；同样，反变换处理后的图像最终也要裁剪，我们保留左上角的 $M\times N$ 部分。

频率域滤波

频率域滤波是指在频率域上将滤波器 $H(u,v)$ 乘以图像的傅里叶变换 $F(u,v)$，得到 $G(u,v)$，然后再将 $G(u,v)$ 进行反傅里叶变换，得到滤波后的图像 $g(x,y)$。

$$g(x,y)=\Re\{\Im^{-1}\{H(u,v)F(u,v)\}\}(-1)^{x+y}$$

低通滤波器

理想低通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 0 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$$

其中 $D(u,v)$ 表示频率域上的距离，D_0 表示截止频率。

$$D(u,v)=\sqrt{(u-\frac{P}{2})^2+(v-\frac{Q}{2})^2}$$

理想低通滤波器包含的功率比例为：

$$p_{D_0}=\frac{\sum_{D(u,v)\le D_0}|F(u,v)|^2}{\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{v=0}^{Q-1}|F(u,v)|^2}$$

高斯低通滤波器

二维频域上截止频率为 D_0 的高斯低通滤波器：

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

一维频域上的标准差为 σ 的高斯低通滤波器：

$$H(u) = Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

反求空间域的滤波器：

$$\begin{aligned}
h(x) &= \mathfrak{J}^{-1}\{H(u)\} \\
&= \mathfrak{J}^{-1}\{Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi ux} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}+j2\pi ux} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma}-j\sqrt{2}\pi\sigma x)^2} e^{-2\pi^2\sigma^2x^2} du \\
&= Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma}-j\sqrt{2}\pi\sigma x)^2} du \\
&= Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-j2\pi\sigma^2x)^2} du \\
\text{令} r = u - j2\pi\sigma^2 x \text{ 则} u = r + j2\pi\sigma^2 x \text{ ,} du = dr \\
&= A\sigma\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\sigma^2x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\
&= A\sigma\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\sigma^2x^2}
\end{aligned}$$

巴特沃斯低通滤波器

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

越接近原点的频率越容易通过滤波器，n 越大，越接近理想低通滤波器。

高通滤波器

频率域上的高通滤波器可以通过频率域上的低通滤波器得到，即：

$$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

理想高通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 1 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$$

高斯高通滤波器

$$H(u,v)=1-e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

巴特沃斯高通滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

注意巴特沃斯低通滤波器和高通滤波器的分母不同

频率域中的拉普拉斯

$$H(u,v)=-4\pi^2[(u-\frac{P}{2})^2+(v-\frac{Q}{2})^2]=-4\pi^2D^2(u,v)$$

给定图像 $f(x,y)$ 的傅里叶变换 $F(u,v)$，那么其拉普拉斯算子为：

$$\nabla^2 f(x,y)=\mathfrak{J}^{-1}\{H(u,v)F(u,v)\}$$

对应的图像增强/锐化方法为：

$$g(x,y)=f(x,y)+c\nabla^2 f(x,y)$$

如果 $H(u,v)$ 是负数，那么 $c=-1$，与拉普拉斯核的中心系数的正负关系类似。

$$\begin{aligned}g(x,y)&=\mathfrak{J}^{-1}\{F(u,v)-H(u,v)F(u,v)\}\\&=\mathfrak{J}^{-1}\{F(u,v)(1+4\pi^2D^2(u,v))\}\end{aligned}$$

频率域中的钝化掩蔽

空域的钝化掩蔽是从原始图像中减去一个平滑图像，从而得到边缘图像：

$$g_{mask} = f(x,y) - (f \star h_{lp})(x,y)$$

再将边缘图像加回到原始图像中，从而得到增强的图像：

$$g(x,y) = f(x,y) + kg_{mask}$$

其中 k 是一个常数，h_{lp} 是一个低通滤波器的空域核。对应的频域表示为：

$$\begin{aligned} g_{mask} &\Leftrightarrow F(u,v) - H_{lp}(u,v)F(u,v) \\ g(x,y) &\Leftrightarrow F(u,v) + k[F(u,v) - H_{lp}(u,v)F(u,v)] \\ &\Leftrightarrow (1+k)F(u,v) - kH_{lp}(u,v)F(u,v) \\ &\Leftrightarrow (1+k-kH_{lp}(u,v))F(u,v) \end{aligned}$$

选择性滤波

带阻滤波器和带通滤波器

低通滤波器和高通滤波器以截断频率 D_0 为界，分别将低于截断频率和高于截断频率的频率滤除，而带阻滤波器和带通滤波器则是在中心频率 C_0 (频带中心) 附近滤除或保留一定带宽的频率。

理想带阻滤波器：

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } C_0 - \frac{W}{2} \le D(u,v) \le C_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

高斯带阻滤波器：

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{[D(u,v)-C_0]^2}{2\sigma^2}}$$

这个滤波器的问题是 $D(u,v)=0$ 时 $H(u,v)<1$，对低频信号起到了抑制作用，所以我们可以将其改为修正高斯带阻滤波器：

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{1}{2}[\frac{D^2(u,v)-C_0^2}{D(u,v)W}]^2}$$

巴特沃斯带阻滤波器：

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-C_0^2}]^{2n}}$$

陷波滤波器

陷波滤波器假定两个对称的中心频率 $(\frac{M}{2}+u_k, \frac{N}{2}+v_k)$ 和 $(\frac{M}{2}-u_k, \frac{N}{2}-v_k)$，那么对应的距离为：

$$D_k(u,v) = \sqrt{(u-\frac{M}{2}-u_k)^2+(v-\frac{N}{2}-v_k)^2}$$
$$D_{-k}(u,v) = \sqrt{(u-\frac{M}{2}+u_k)^2+(v-\frac{N}{2}+v_k)^2}$$

陷波滤波器的一般形式为：

$$H(u,v) = \prod_{k=1}^{K} H_k(u,v)H_{-k}(u,v)$$

陷波带通滤波器可由 1 减去陷波带阻滤波器得到：

$$H_{NP}(u,v) = 1 - H_{NR}(u,v)$$

在第二版教材中，作者给出了一个更简单的形式，只考虑两个中心频率，将频率点距离两个中心的距离重写为 $D_1(u,v)$ 和 $D_2(u,v)$，将半径重写为 D_0。

理想陷波带阻滤波器：

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_1(u,v) \le D_0 \text{ or } D_2(u,v) \le D_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

阶数为 n 的巴特沃斯陷波带阻滤波器：

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[\frac{D_0^2}{D_1(u,v)D_2(u,v)}]^n}$$

高斯陷波带阻滤波器：

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{1}{2}[\frac{D_1(u,v)D_2(u,v)}{D_0^2}]}$$